Soluciones
Olimpiadas Matemáticas del Nivel Superior
Programa de Matemática, DEPR
Abril 2015

Instrucciones: Conteste cada pregunta comenzando en la cara de la hoja de papel donde se presenta la pregunta y continuando al dorso de ser necesario. Se corregirá solamente el trabajo que aparezca en ambos lados de la hoja de una pregunta. Cada pregunta tiene un valor de 10 puntos.

Instructions: Answer each question beginning on the face of the sheet of paper where the question appears and use the back of the page if needed. Only the work that appears on both sides of the sheet of paper with the statement of a given problem will be graded. Each problem has a total value of 10 points.

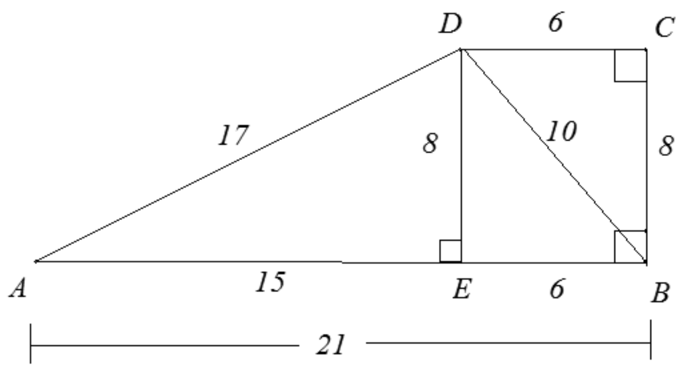
1. **Problema:**
   Sebastián nació el día que Ana cumplió tres años. ¿Cuántos años tendrá Sebastián cuando Ana tenga el doble de la edad de Sebastián

1. **Problem:**
   Sebastián was born on Ana's third birthday. What will be the age of Sebastián when Ana is twice as old as Sebastián?

   Solución:
   Si S es la edad de Sebastián en un año dado y A es la edad correspondiente de Ana, entonces $A = S + 3$. Cuando Ana tiene el doble de la edad de Sebastián tenemos $A = 2S$, y podemos concluir que $2S = S + 3$ de donde se obtiene que $S = 3$. Por lo tanto, Ana tendrá el doble de la edad de Sebastián cuando Sebastián tenga tres años (Ana tendrá entonces 6 años).

2. **Problema:** ¿Cuál es la suma de las distancias AD y BD en la figura que se muestra.

2. **Problem:** What is the sum of the distances AD and BD in the figure shown.



Solución:
La suma de las distancias es 17. Por el Teorema de Pitágoras $BD = 10$. Si E es el punto en AB tal que $\angle DEA = 90°$, entonces $DE = 8$ y $AE = 21 - 6 = 15$. Aplicando el Teorema de Pitágoras nuevamente, $AD = 17$. Luego, la suma de las distancias $10 + 7 = 17$.

3. **Problema:**
¿Cuántos enteros positivos de dos dígitos hay tal que el dígito de las decenas es mayor que el dígito de las unidades.

3. **Problema:** How many two digit positive integers are there with the tens digit greater than the units digit?

Solución:
Se puede escoger nueve posibles dígitos para el dígito de las unidades: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; el 9 no se puede escoger como dígito de las unidades ya que el dígito de las decenas debe ser mayor y no hay dígitos mayores que 9 en la base decimal. Si escogemos un dígito d entre cero y ocho para las unidades, podemos escoger $9-d$ dígitos para las decenas. Por lo tanto si el dígito de las unidades es 0 podemos escoger 9 posibles dígitos para el decenas, sí el dígito de las unidades fuese 1 podríamos escoger 8 y así sucesivamente. Por lo tanto hay $9 + 8 + \cdots + 1 = 45$ enteros positivos de dos dígitos con el dígito de las decenas mayor que el de las unidades.

4. **Problema:**
Sean x y b enteros positivos y sea $b > 1$. La representación del número x en la base b es 324 y en la base $b + 2$ es 155. Halle b.

4. **Problem:**
Let x and b be positive integers with $b > 1$. The number x has representation 324 in base b and 155 in base $b + 2$. Find b.

Solución:

La información provista nos lleva a la ecuación,

$3b^2 + 2b + 4 = 1 \cdot (b + 2)^2 5(b + 2) + 5 = x$. Por lo tanto,

$2b^2 - 7b - 15 = 0$, es decir,

$(2b + 3)(b - 5) = 0$.

La única solución entera de la ecuación anterior es $b = 5$ y uno constata que el número 324 en la base 5 es el mismo que el número 155 en la base 7.

5. **Problema:** Cierto número real x queda en el intervalo unitario, es decir, satisface la relación $0 \leq x \leq 1$. Al dividir este intervalo en tres partes iguales,x queda ubicado en el segundo intervalo resultante. Al dividir a su vez este último intervalo, en tres partes iguales, x queda, nuevamente, en el segundo intervalo que resulta, y así sucesivamente. Si sabemos que x no es una fracción ternaria (una fracción cuyo denominador es una potencia de tres), determina el valor de x.

5. **Problem:** A certain real number x is in the unit interval, that is, $0 \leq x \leq 1$. It this interval is divided in three equal parts, x is located in the second resulting interval. If this last interval is divided, once more, in three equal parts, x is located, again, in the second resulting interval, and so on. If we know that x is not a triadic fraction, (a fraction whose denominator is a power of three), find the value of x.

Solución 1:
Como x está ubicado en el segundo intervalo que se obtiene al dividir el intervalo unitario en tres intervalos iguales, y x no es una fracción ternaria, tenemos
$$\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}.$$
Análogamente, por como x queda en el segundo intervalo que se obtiene al dividir el intervalo $[1/3, 2/3]$ en tres partes iguales, y x no es una fracción ternaria, tenemos
$$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} < x < \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} = \frac{5}{9}.$$
Continuando de esta manera y recordando que x no es una fracción ternaria, para todo $n = 1, 2, \cdots ,$,
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} < x < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n}.$$
El único número que satisface esta relación para todos los valores de n es $x = 1/3 + 1/3^2 + \cdots 1/3^n + \cdots = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Solución 2:
La condición que ubica a x siempre en el segundo intervalo de la división por tres, dice que la expansión decimal de x en la base 3 es $0.111 \cdots = 0.\overline{1}$. Esto dice que $10x = 1.\overline{1}$ y $10x - x = (10 - 1)x = 1$. Como $10 - 1 = 2$ en la base 3, esto dice que $2x = 1$ y $x = 1/2$.

6. **Problema:**
Los habitantes del planetoide Plutón emplean las mismas operaciones matemáticas que los terrícolas ($+$, $-$, etc.). Ellos emplean además un operador @ desconocido por nosotros. Las siguientes aseveraciones son ciertas para cualesquiera'dos números reales x y y:

6. **Problem:**
The inhabitants of planetoid Pluto use the same mathematical operations as we do on earth ($+$, $-$, etc.). They also use an operator @, unknown to us. The following statements are true for any real numbers x and y:

$$\begin{aligned} x@0 &= x \\ (x+1)@y &= x@y + y + 1. \end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de $12@5$?
What is the value of $12@5$?

Solución: Por la tercera relación tenemos

$$\begin{aligned} (x+1)@y &= x@y + y + 1.\ \text{, es decir,} \\ x@y &= (x-1)@y + (y+1). \end{aligned}$$

Aplicando la última relación una vez más, tenemos

$$x@y = (x-2)@y + 2(y+1).$$

Por consiguiente, si x es un entero positivo,

$$\begin{aligned} x@y &= (x-x)@y + x(y+1) \\ &= 0@y + x(y+1) \\ &= y + x(y+1). \end{aligned}$$

Esta última relación nos dice que $x@y = x + y + xy$ y, además, que $12@5 = 12 + 5 + 60 = 77$.

Problema:

7. Halle el valor de n:

Problem:

7. Find the value of n:

$$9^n + 9^n + 9^n = 3^{2015}.$$

Solución:

Como $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2n} + 3^{2n} + 3^{2n} = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$, tenemos $3^{2n+1} = 3^{2015}$. Por lo tanto $2n + 1 = 2015$ y $n = 1007$.

8. **Problema:**
   Sea n el producto de los primeros 500 números primos. ¿Cuántos ceros tiene al final el número n^2?

8. **Problem:**
   Let n be the product of the first 500 primes. How many final zeros does n^2 have?

   Solución:
   Por cada par de factores primos de 2 y 5 que aparecen en la factorización prima de un número, aparecerá un cero final en el representación decimal del número. Como los primos que entran en el producto de n solo aparece un factor de 2 y un factor de 5, n tiene un cero final y n^2 tiene dos.

9. **Problema:**
El producto de tres enteros impares consecutivos reducido por 23 es 99 menos que el cubo de la suma del número menor y dos. Determinar el menor de los números.

9. **Problem:**
The product of three consecutive odd integers reduced by 23 is 99 less than the cube of the cube of the sum of the smallest number and two. Find the smallest number.

Solución:

Sean los números impares, en orden, $x-2, x, x+2$. Las condiciones del problema estipulan que

$$(x-2)x(x+2) - 23 = x^3 - 99) \text{ es decir,}$$
$$4x + 23 = 99.$$

Por lo tanto $x = 19$ y el número menor es 17.

10. **Problema:**
La función f se define en los enteros positivos de la siguiente manera:
$$f(1) = 0;$$
$$f(n) = 3f(n-1) + 1 \text{ para todo } n > 1.$$
Calcular el valor de $f(1003) - f(1001)$.

10. **Problem:** Function f is defined on the positive integers as follows:
$$f(1) = 0;$$
$$f(n) = 3f(n-1) + 1 \text{ for all } n > 1.$$
Compute the value of $f(1003) - f(1001)$.

Solución:

Un poco de exploración revela:

$$\begin{aligned}
&f(2) = 1\\
&f(3) = 3f(2) + 1 = 3 + 1\\
&f(4) = 3f(3) + 1 = 3^2 + 3 + 1 = \sum_{k=0}^{4-2} 3^k, \text{ y en general,}\\
&f(n) = \sum_{k=0}^{n-2} 3^k, \text{ para todo } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(1003) - f(1001) = \sum_{k=0}^{1001} 3^k - \sum_{k=0}^{999} 3^k = 3^{1000} + 3^{1001} = 3^{1000}(1 + 3) = 4 \cdot 3^{1000}$.